Brevet de Technicien Supérieur
Groupement A1

MATHÉMATIQUES

SESSION 2014

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3
INFORMATIQUE ET RÉSEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	3	3
SYSTÈMES ÉLECTRONIQUES	2	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Circulaire 99-186 du 16 novembre 1999

Document à rendre et à agrafer avec la copie :

Document réponse 1 ....page 8/9

Document réponse 2 ....page 9/9

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

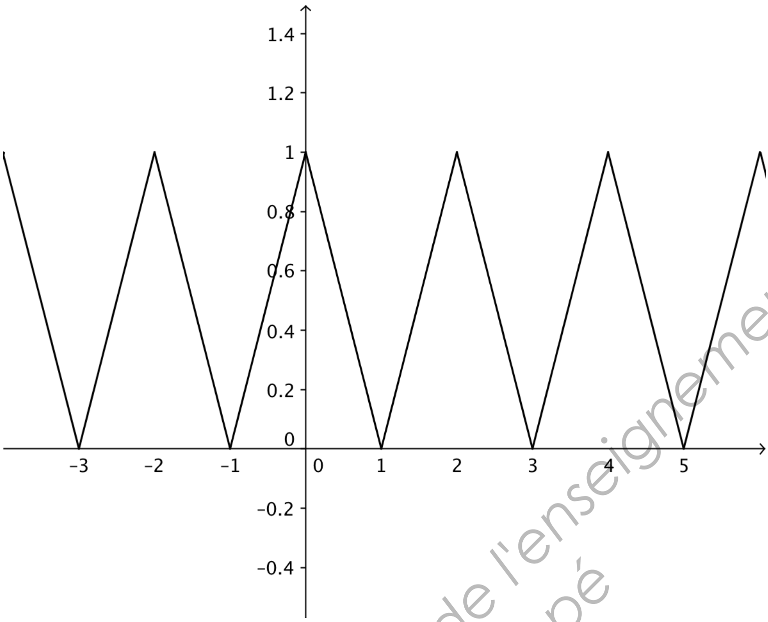
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 (10 points)

Partie A

On considère la fonction f, périodique de période T, dont une représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous.



Le développement en série de Fourier de la fonction f est noté :

$$a_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t) \right).$$

1. Cette question est un QCM.
   Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.

   (a) La période T de la fonction f est :

   - 0,5   • 1   • 2   • 3

   (b) Le coefficient b_1 vaut :

   - $-\dfrac{4}{\pi^2}$ • 0   • $\dfrac{1}{4}$

   (c) Le nombre réel a_0 vaut :

   - 0   • 0,25   • 0,5   • 1

(d) On donne l'égalité suivante

$$\int_0^1 (1-t)\cos(\pi t)\,dt = \frac{2}{\pi^2}.$$

La valeur exacte du coefficient a_1 est :

- 0
- $\dfrac{4}{\pi^2}$
- $\dfrac{2}{\pi^2}$
- $\dfrac{1}{\pi^2}$

Application de la formule de Bessel-Parseval

2. On rappelle que la puissance moyenne P_f, par période du signal, modélisé par une fonction f de période T est donnée par

$$P_f = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\,dt.$$

Démontrer que $P_f = \dfrac{1}{3}$.

3. On note g_n la fonction définie, pour tout nombre entier n strictement positif par

$$g_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \left(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)\right)$$

et

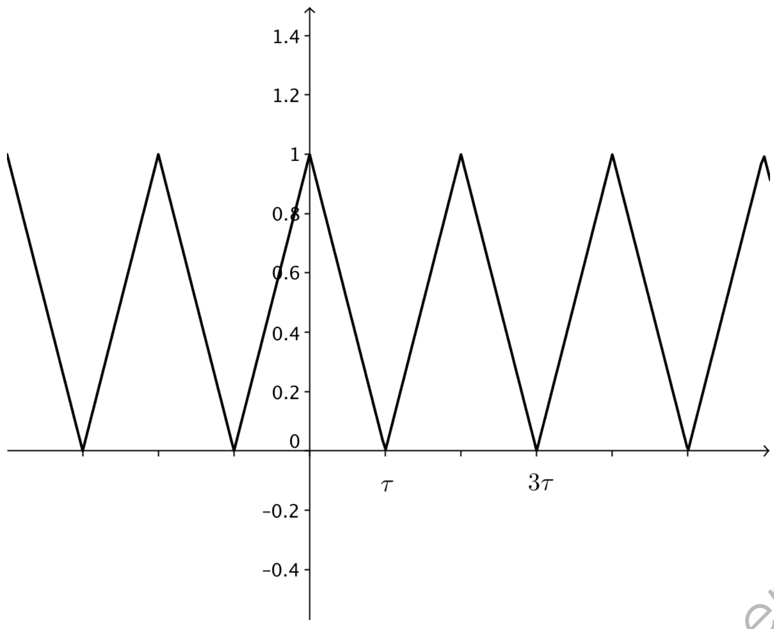
$$S_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

(a) Le tableau 1 du document réponse 1 fournit des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_n. Compléter ce tableau.

(b) En déduire la plus petite valeur de l'entier n telle que la puissance moyenne par période de la fonction g_n est supérieure ou égale à $0{,}999\,P_f$.

Partie B

Soit τ un nombre réel strictement positif.
On s'intéresse maintenant à la fonction e représentant un signal de même forme que celui de la partie A, mais dont la période, exprimée en seconde, est 2τ et dont le graphe est représenté ci-après.



Ce signal est placé en entrée d'un filtre passe-bas (il s'agit d'un filtre de Butterworth d'ordre 6 et de fréquence de coupure 40 Hz).
Le signal de sortie obtenu est modélisé par une fonction h.

1. On se place dans le cas où la fonction e est telle que $\tau = 0{,}1$.
   La figure 1 du document réponse 1 donne une représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-0{,}4\,;\,0{,}4]$, obtenue à l'aide d'un logiciel de simulation.

   (a) Déterminer graphiquement la valeur maximale h_{max} de la fonction h.

   (b) Sur la figure 1 du document réponse 1, tracer la représentation graphique de la fonction e.

   (c) Le *facteur de crête* du signal h, exprimé en décibels, est défini par

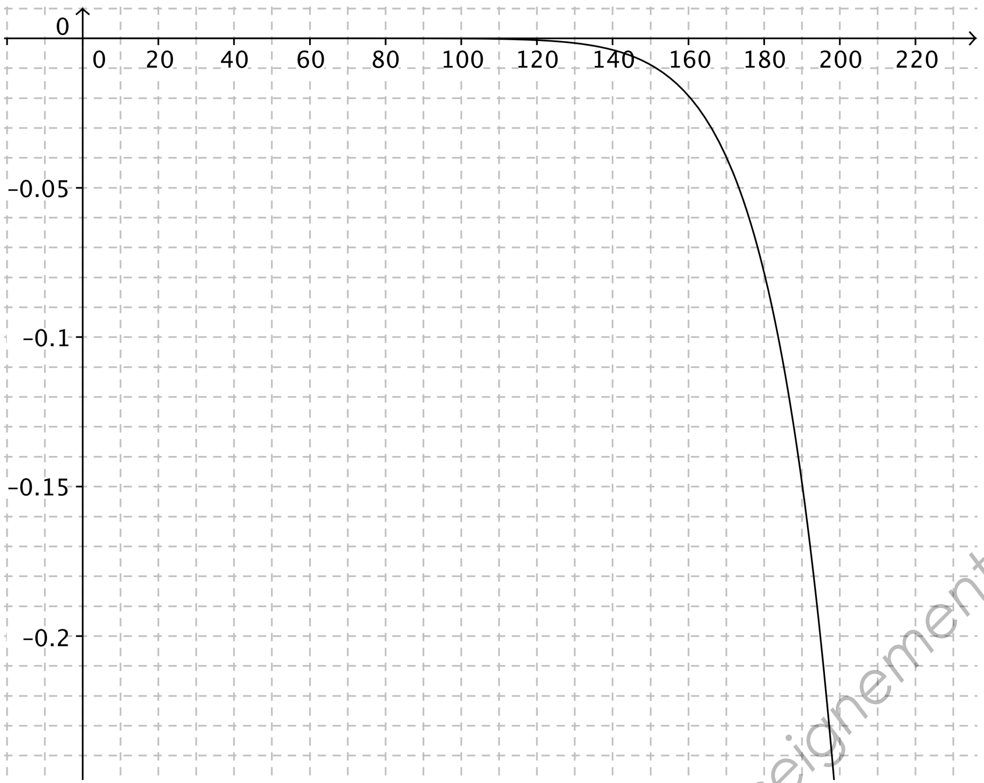
   $$F_c = \frac{10}{\ln(10)} \ln\left(\frac{h_{max}^2}{P_h}\right).$$

   On a obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul numérique la valeur approchée suivante de la puissance moyenne par période P_h du signal h :

   $$P_h \simeq 0{,}33330.$$

   En déduire une valeur approchée du facteur de crête F_c.

2. On note $G(\omega)$ le gain, exprimé en décibels, du filtre passe-bas en fonction de la pulsation ω.
   Le graphique ci-après donne une représentation graphique de la fonction G pour les « petites » valeurs de la pulsation ω.



(a) Déterminer graphiquement l'intervalle des valeurs de ω pour lesquelles on a

$$G(\omega) \geqslant -0{,}1\,\mathrm{db}$$

.

(b) On donne l'expression de $G(\omega)$:

$$G(\omega) = \frac{-10}{\ln(10)} \ln\left(1 + \left(\frac{\omega}{80\pi}\right)^{12}\right).$$

On note ω_0 la solution de l'équation $G(\omega) = -0{,}1$.

Déterminer, à 10^{-1} près, en précisant la démarche suivie, une valeur approchée de ω_0.

Remarque. *La notion de facteur de crête d'un signal est utile, par exemple, en télécommunications. On trouve aisément dans la littérature le facteur de crête du signal triangulaire e, à savoir 4,77 db.*

EXERCICE 2 (10 points)

On note $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie, sur l'ensemble des nombres réels, par

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

On considère un système entrée-sortie analogique du premier ordre dont la fonction de transfert H est définie par

$$H(p) = \frac{2}{1 + 0{,}5p}.$$

1. On considère la fonction causale s dont la transformée de Laplace est

$$S(p) = \frac{2}{p(1 + 0{,}5p)}.$$

La fonction s modélise la réponse du système analogique à l'échelon unité $\mathcal{U}$.

(a) Vérifier que

$$S(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+2}.$$

(b) En déduire $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

(c) Compléter la ligne donnant les valeurs de $s(t)$ dans le tableau 2 du document réponse 2 en donnant des valeurs approchées à 10^{-3} près.

2. On considère maintenant un système entrée-sortie numérique dont la fonction de transfert F est définie par

$$F(z) = H\left(100 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right).$$

Ce système numérique permet d'approcher le système analogique.

L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisées, respectivement, par deux suites causales x et y. Ces deux suites admettent des transformées en $\mathcal{Z}$ notées, respectivement, $X(z)$ et $Y(z)$ telles que

$$Y(z) = F(z)\, X(z).$$

(a) Montrer que

$$F(z) = \frac{2\left(1 + z^{-1}\right)}{51 - 49z^{-1}}.$$

(b) En déduire que

$$51Y(z) - 49z^{-1}Y(z) = 2X(z) + 2z^{-1}X(z).$$

(c) En déduire que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 0, on a

$$y(n) = \frac{49}{51} y(n-1) + \frac{2}{51} x(n) + \frac{2}{51} x(n-1).$$

3. On suppose dans cette question que, pour tout nombre entier n, on a $x(n) = d(n)$, où d est la suite impulsion unité définie par

$$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \quad \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Grâce à la formule obtenue dans la question 2c, compléter le tableau 1 du document réponse 2. On pourra utiliser des valeurs approchées à 10^{-3} près.

4. Dans cette question, on suppose que, pour tout nombre entier n, on a $x(n) = e(n)$, où e est la suite échelon unité définie par

$$\begin{cases} e(n) = 0 \quad \text{si } n < 0 \\ e(n) = 1 \quad \text{si } n \geqslant 0. \end{cases}$$

On admet que

$$Y(z) = \frac{2z(z+1)}{(51z-49)(z-1)}.$$

(a) Vérifier que

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{100}{51} \times \frac{z}{z - \frac{49}{51}}.$$

(b) En déduire $y(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

(c) Compléter la ligne donnant les valeurs de $y(n)$ dans le tableau 2 du document réponse 2 avec des valeurs approchées à 10^{-3} près.

Le tableau 2 du document réponse 2 permet de comparer les réponses à l'échelon unité du système analogique et du système numérique.

Document réponse 1 à rendre avec la copie

n	1	2	3	4	5	6
a_n^2	0,164 3	0	0,002 0	0	0,000 3	0
S_n	0,332 1	0,332 1				

Tableau 1 – Puissances des harmoniques

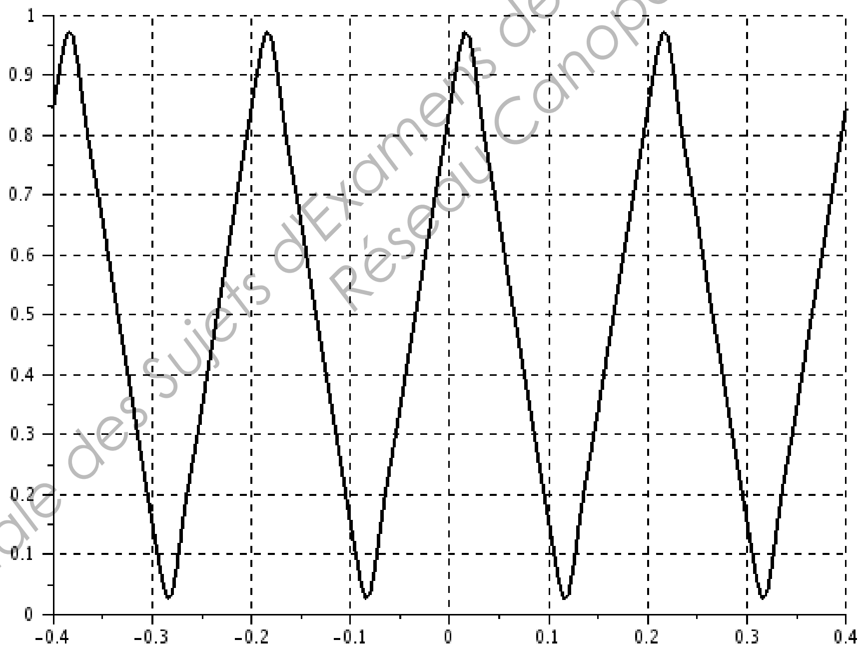


FIGURE 1 – La fonction h

Document réponse 2 à rendre avec la copie

n	-1	0	1	2	3
$d(n)$	0	1	0	0	0
$y(n)$	0				

Tableau 1 (ici $x(n) = d(n)$)

n	0	10	20	30	40	50	100	150
$y(n)$	0,039		1,119	1,410		1,735		
$t = 0,02n$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
$s(t)$	0	0,659			1,596		1,963	

Tableau 2 (ici $x(n) = e(n)$)