Brevet de Technicien Supérieur
Groupement A2

MATHÉMATIQUES

SESSION 2011

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION	2	3
INFORMATIQUE ET RÉSEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	3	3
SYSTÈMES ÉLECTRONIQUES	2	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	4

Matériel autorisé :
Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

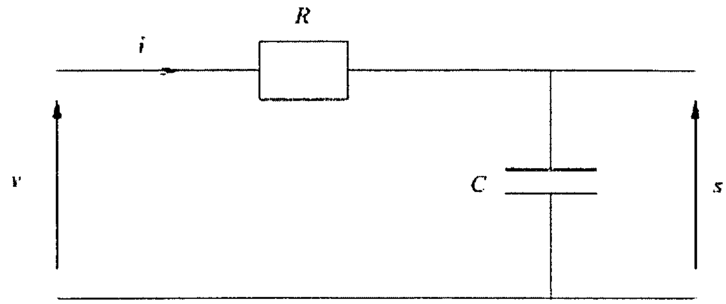
circulaire 99-186 du 16 novembre 1999

Documents à rendre avec la copie :
Document réponse numéro 1..........page 8/9
Document réponse numéro 2..........page 9/9

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 (10 points)

On considère un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur représenté par le schéma ci-dessous.



s représente la tension entre les bornes du condensateur lorsque le circuit est alimenté par une source de tension v et parcouru par un courant i.
Les fonctions s et v sont liées par l'équation différentielle suivante :

$$RCs'(t) + s(t) = v(t). \tag{1}$$

De plus, on suppose que $s(t) = 0$, pour tout nombre réel t négatif ou nul.
Pour tout l'exercice, on considère que $R = 250.10^3\,\Omega$ et $C = 20.10^{-9}$ F.
On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par :

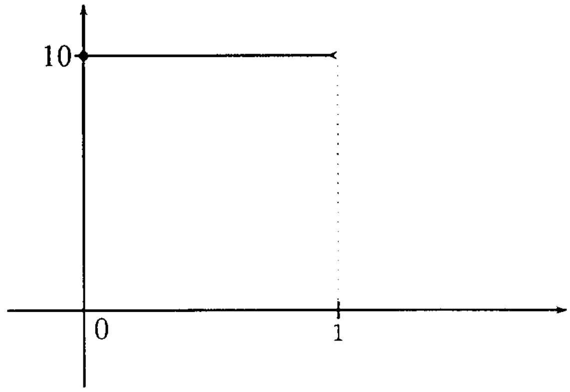
$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Les parties A, B et C de l'exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A : QCM

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de chaque question suivi de la réponse choisie.
Une bonne réponse rapporte 1 point, ***une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.***

1. La fonction f est un créneau représenté par le schéma suivant :



$f(t)$ est défini par :

- $10\mathscr{U}(t-1)$
- $10[\mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-1)]$
- $10\mathscr{U}(t)$
- $\mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-1)$

2. On note V et S les transformées de Laplace respectives des fonctions v et s.
On précise que $s(0^+)=0$. Les transformées de Laplace V et S sont telles que :

- $S(p)=\dfrac{1}{1+0,005p}V(p)$
- $s(t)=\dfrac{1}{1+0,005p^2}V(p)$
- $S(p)=\dfrac{0,005}{0,005+p}V(p)$
- $S(p)=(1+0,005p)V(p)$

3. Dans cette question, on suppose que $v(t)=2$ pour tout nombre réel t positif ou nul.
L'équation différentielle (1) s'écrit alors :

$$0,005s'(t)+s(t)=2.$$

Pour tout nombre réel t positif ou nul, la solution générale s de l'équation différentielle (1) est définie, k étant une constante réelle, par :

- $s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}+2t$
- $s(t)=k\mathrm{e}^{200t}+2$
- $s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}+2$
- $s(t)=k\mathrm{e}^{-200t}$

Partie B : simulation numérique

Pour simuler le fonctionnement du circuit, on approche la tension d'entrée v par un signal discret causal x et la tension de sortie s par un signal discret causal y.
Un pas de discrétisation T_e étant choisi, les signaux x et y vérifient, pour tout nombre entier n, l'équation :

$$0,005\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e}+y(n)=x(n). \qquad (2)$$

1. Dans toute la suite de l'exercice, on choisit $T_e=0,5\cdot10^{-3}$s.
Montrer que l'équation (2) s'écrit alors :

$$11y(n)-10y(n-1)=x(n).$$

2. On suppose désormais que $x(n) = 2e(n)$ où e est l'échelon unité causal discret défini par $e(n) = 1$ pour tout entier naturel n.

   (a) Montrer que la transformée en Z du signal discret y, notée $Y(z)$, vérifie :

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{11} \times \frac{z}{(z-1)\left(z - \frac{10}{11}\right)}.$$

   (b) Vérifier que :

$$Y(z) = \frac{2}{11}\left(\frac{11z}{z-1} - \frac{10z}{z - \frac{10}{11}}\right).$$

   (c) En déduire l'expression de $Y(z)$ sous forme d'une somme.

3. (a) Exprimer $y(n)$ en fonction de n, pour tout nombre entier naturel n.

   (b) Calculer la limite de $y(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

On admet que $y(n) = 2 - 2\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}$.

1. Compléter le tableau de valeurs du signal numérique y figurant sur le document réponse numéro 1. Les résultats seront arrondis au centième.
2. Représenter graphiquement le signal numérique y sur la figure 1 du document réponse numéro 1.

Exercice 2 (10 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.
Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.

Partie A

On considère la fonction f périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} f(t) = 0,5t + 0,5 & \text{si } -1 < t < 1 \\ f(1) = 0,5. \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction f s'écrit :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4;4]$ en utilisant la figure 2 du document réponse numéro 2.
2. Démontrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Préciser la valeur de la pulsation ω.

   (b) En utilisant une intégration par parties, calculer b_1.

   On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

4. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel t par $g(t) = f(t) - 0,5$.

   (a) Tracer la représentation graphique de la fonction g sur la figure 3 du document réponse numéro 2.

   (b) Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction g ?

   (c) En comparant les coefficients de Fourier des fonctions f et g, montrer que $a_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.

5. On rappelle que la valeur efficace de la fonction f sur une période est le nombre réel positif, noté f_{eff}, défini par :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (f(t))^2\,dt.$$

   Démontrer que $f_{eff}^2 = \dfrac{1}{3}$.

6. On rappelle la formule de Parseval :

$$f_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de f_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

(a) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de P, puis de $\frac{P}{f_{eff}^2}$.

(b) En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace f_{eff}^2 par P.

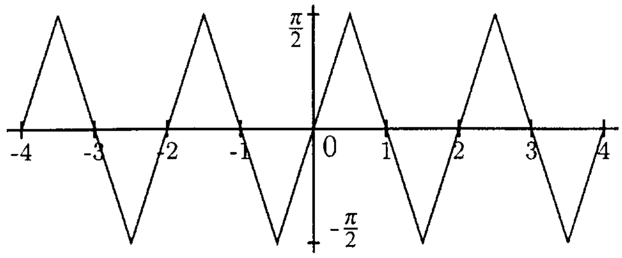
Partie B

Soit h la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique de période 2, dont le développement en série de Fourier est :

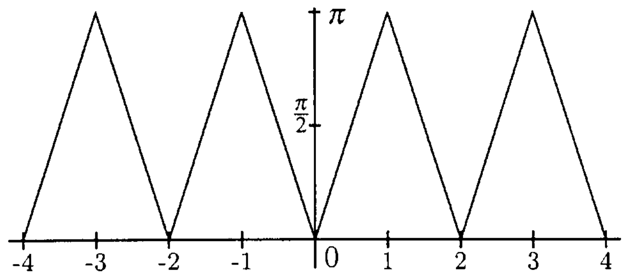
$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left((2p+1)\,\pi t\right).$$

1. Déterminer la parité de la fonction h.
2. Sur l'annexe page 7 sont proposées quatre représentations graphiques.
   Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4\,;4]$? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer $h(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

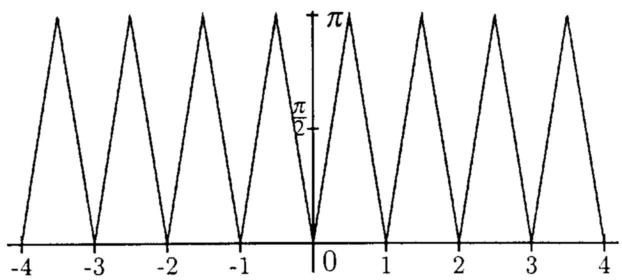
Annexe



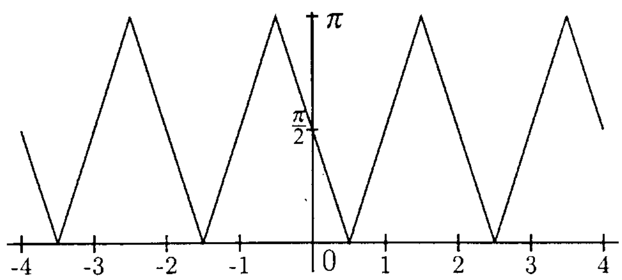
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Document réponse numéro 1 à joindre à la copie

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(n)$		0,35				0,87			1,15		1,30

Tableau de valeurs de la suite y (à compléter)

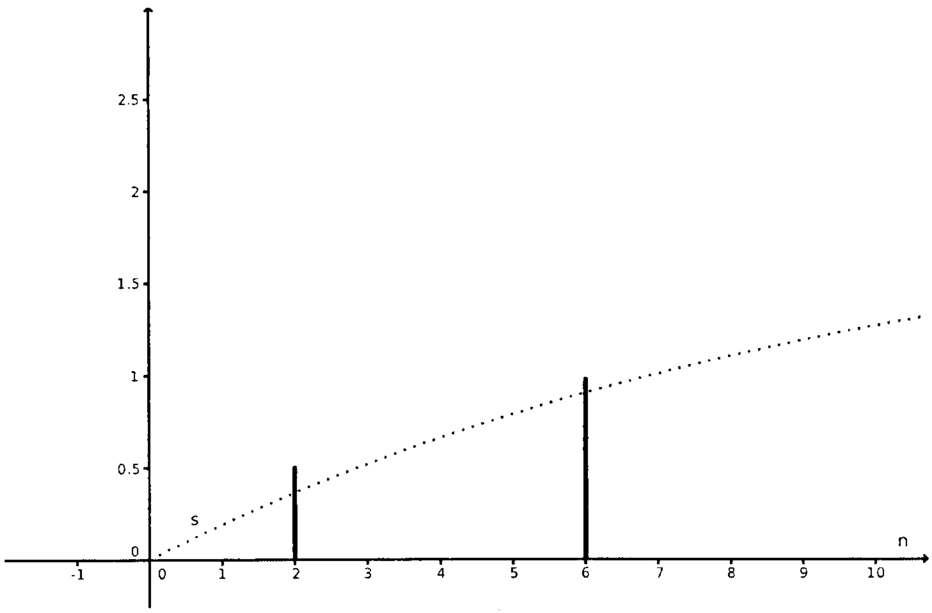


Figure 1 (à compléter)

Document réponse numéro 2 à joindre à la copie

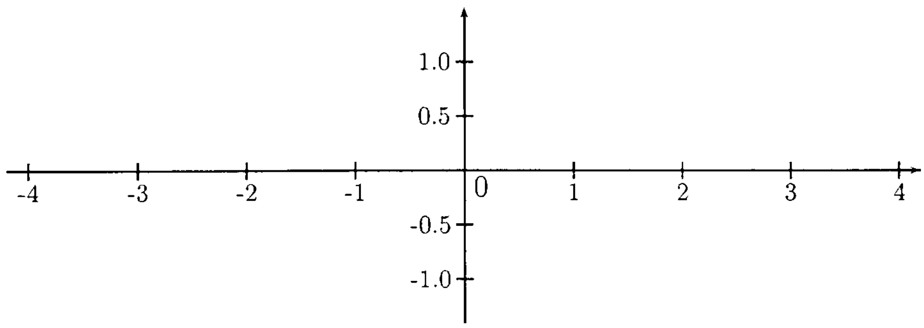


Figure 2 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

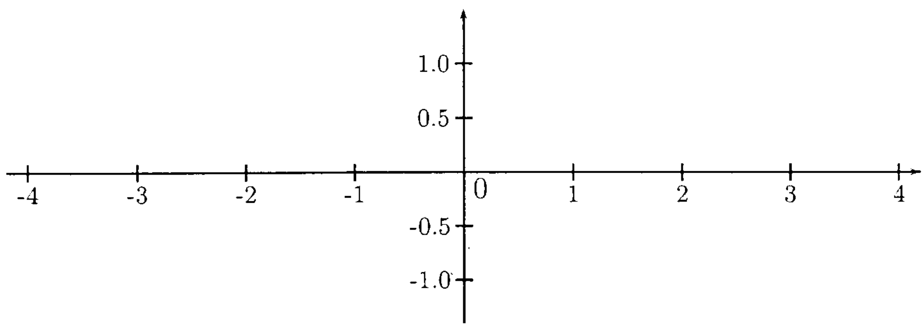


Figure 3 représentation graphique de la fonction g (à compléter)