Brevet de Technicien Supérieur
Groupement A1

MATHÉMATIQUES

SESSION 2012

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3

Matériel autorisé :
Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

circulaire 99-186 du 16 novembre 1999

Document à rendre et à agrafer avec la copie :
Document réponse ....page 8/10

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 (10 points)

On notera $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

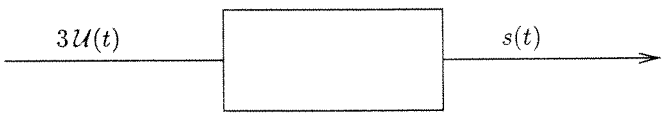
On note e l'échelon causal discret, défini sur l'ensemble des nombres entiers relatifs par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 & \text{si } n < 0 \\ e(n) = 1 & \text{si } n \geqslant 0. \end{cases}$$

On considère un système entrée-sortie du premier ordre. Le signal de sortie est modélisé par une fonction causale s telle que $s(0) = 0$ et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$2s'(t) + s(t) = 3\mathcal{U}(t).$$

Le signal d'entrée prend, à tout instant t, la valeur $3\mathcal{U}(t)$.



Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle

$$2y'(t) + y(t) = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle (E) :

$$2y'(t) + y(t) = 3.$$

Déterminer la fonction constante h solution de cette équation différentielle.

3. En déduire que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = 3 - 3\mathrm{e}^{-0,5t}.$$

4. (a) Etudier le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

   (b) Préciser la valeur du nombre réel ℓ, limite de $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

5. L'annexe 1 jointe au sujet comporte quatre courbes représentatives de fonctions causales. Parmi ces quatre courbes, laquelle représente la fonction s ? Justifier ce choix.
6. On appelle temps de réponse du système la valeur du nombre réel t à partir de laquelle $s(t)$ atteint 95 % de la valeur de la limite ℓ calculée à la question 4.
   Déterminer une valeur approchée du temps de réponse de ce système.
   Plusieurs méthodes sont possibles, préciser la démarche choisie.

Partie B

On s'intéresse maintenant à un système entrée-sortie numérique destiné à approcher le système analogique étudié dans la partie A. Une discrétisation de l'équation différentielle (E) avec un pas de discrétisation T_e permet d'obtenir, pour tout entier naturel n, la relation (E') suivante :

$$2\frac{x(n+1)-x(n)}{T_e}+x(n+1)=3.$$

Pour tout nombre entier n, le nombre réel $x(n)$ fournit une approximation de $s(nT_e)$.
En particulier, on a :

$$x(0)=s(0)=0.$$

Pour toute la suite de l'exercice, on prend $T_e = 0{,}1$ seconde.

1. Montrer que la relation (E') peut s'écrire, pour tout nombre entier positif ou nul, sous la forme
$$x(n+1)=\frac{20}{21}x(n)+\frac{1}{7}.$$
2. On a rempli le tableau de valeurs ci-dessous.

n	0	1	2	3
$x(n)$	0	0,143	0,279	0,408

   Calculer des valeurs approchées à 10^{-3} près des nombres réels $x(4)$ et $x(5)$.
3. On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite $x(n)$.
   Déduire de la question 1 que
$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{7(z-1)\left(z-\frac{20}{21}\right)}.$$
4. Déterminer les nombres réels A et B tels que
$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A}{z-1}-\frac{B}{z-\frac{20}{21}}.$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$x(n) = 3\left(1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n\right).$$

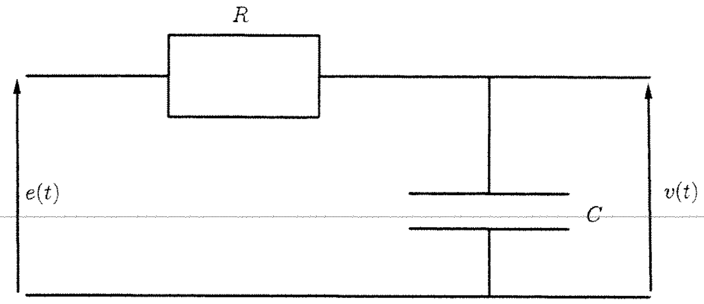
6. (a) Préciser la limite de $x(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geqslant 0{,}95$.

   (c) En déduire, à 10^{-1} près, le temps de réponse en secondes du système numérique. (La notion de temps de réponse d'un système a été défini à la question 6 de la partie A.)

EXERCICE 2 (10 points)

Un circuit électrique comporte, en série, une résistance R et un condensateur de capacité C.



Le circuit est alimenté par une tension « source » représentée par une fonction e. La tension aux bornes du condensateur est représentée par une fonction v. Si on considère cette tension comme signal de « sortie », le circuit joue le rôle de filtre passe-bas.

On notera $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Partie A

Les fonctions e et v vérifient l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ suivante :

$$RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t).$$

De plus, on suppose que $v(t) = 0$ pour tout nombre réel t négatif ou nul. En particulier, on a $v(0) = 0$.

On admet que les fonctions e et v possèdent des transformées de Laplace, notées respectivement E et V.

1. La tension e appliquée en entrée au circuit est telle que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = 10\mathcal{U}(t).$$

   (a) Tracer sur la copie une représentation graphique de la fonction e.

   (b) Exprimer $E(p)$.

2. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, montrer que :

$$V(p) = \frac{10}{p(RCp+1)}.$$

3. (a) Vérifier que

$$V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}.$$

(b) En déduire l'expression de $v(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul en fonction de t, R et C.

Partie B

Dans toute la suite, j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
La transmittance isochrone T du circuit est définie, pour toute pulsation ω, par :

$$T(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}.$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$

$\omega = 4$

1. On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
Montrer que :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

2. Calculer $T(\omega_0)$. Déterminer alors le module et un argument du nombre complexe $T(\omega_0)$.

3. Cette question est posée sous la forme d'un QCM. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, on écrira sur la copie la formule choisie. L'absence de réponse ou une mauvaise réponse n'est pas pénalisante.

(a) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne le module du nombre complexe $T(\omega)$?

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad 1 + \frac{\omega}{\omega_0} \qquad \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

(b) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne un argument du nombre complexe $T(\omega)$?

$$-\arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \qquad \frac{\omega}{\omega_0} \qquad -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4. Vérifier la concordance entre les résultats trouvés aux questions 2 et 3a puis 2 et 3b.

5. Pour une pulsation ω de la tension d'entrée e, le gain $G_{\mathrm{db}}(\omega)$ du circuit, exprimé en décibels, est donné par la formule

$$G_{\mathrm{db}}(\omega) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(|T(\omega)|).$$

$|T(\omega)| = \sqrt{}$

Calculer, à une unité près, le gain correspondant à la pulsation ω_0.

6. **Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $\omega_0 = 500$.**
   Pour tout nombre réel ω appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on pose

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{500}\right)$$

   et on note $M(\omega)$ le point de coordonnées $(\varphi(\omega); G_{\text{db}}(\omega))$.

   Le point $M(\omega)$ décrit la courbe tracée sur la figure du document réponse lorsque ω varie.

   (a) Calculer $\varphi(\omega_0)$.

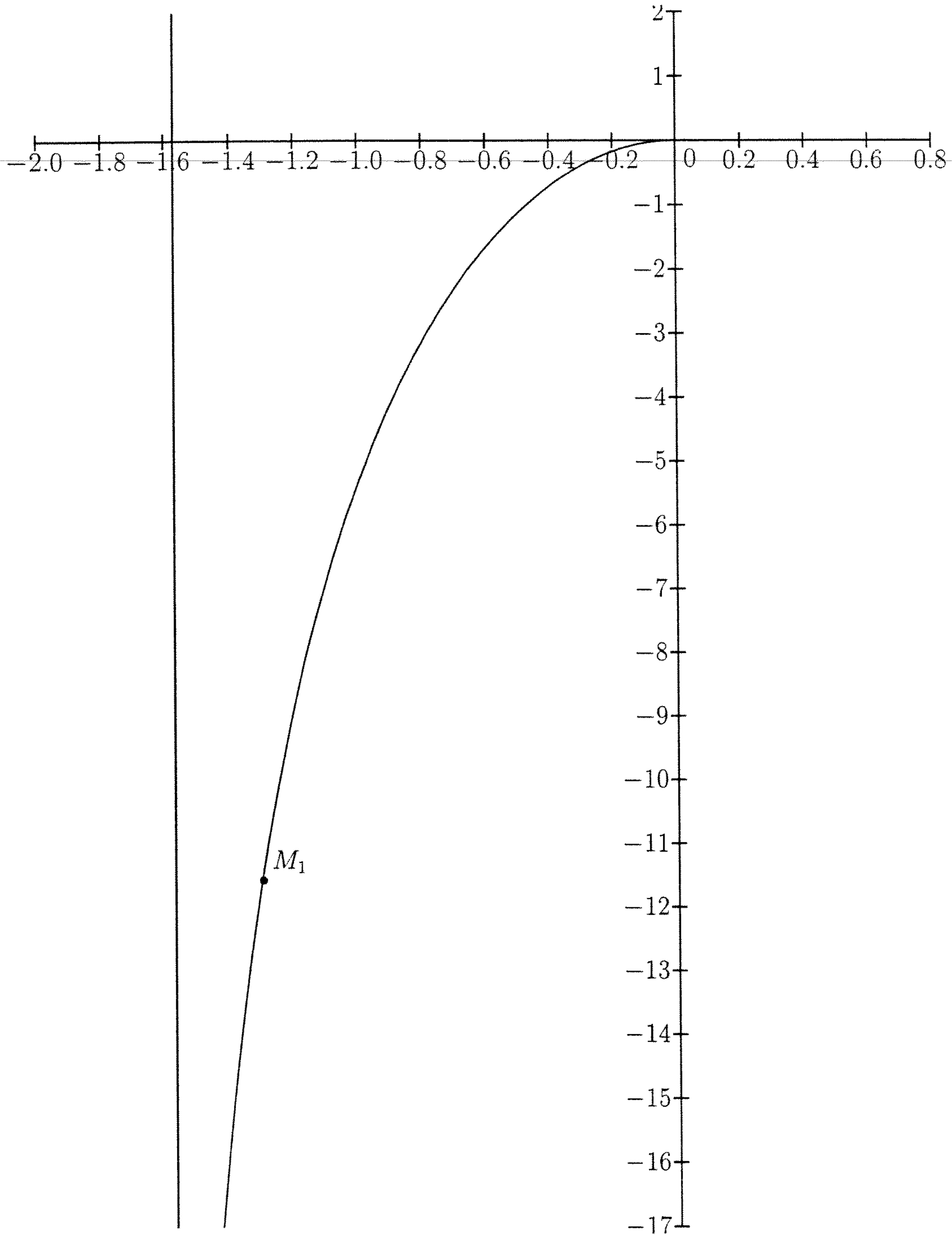
   (b) Placer alors le point $M_0 = M(500)$.

   (c) En déduire graphiquement l'ordonnée du point M_0.

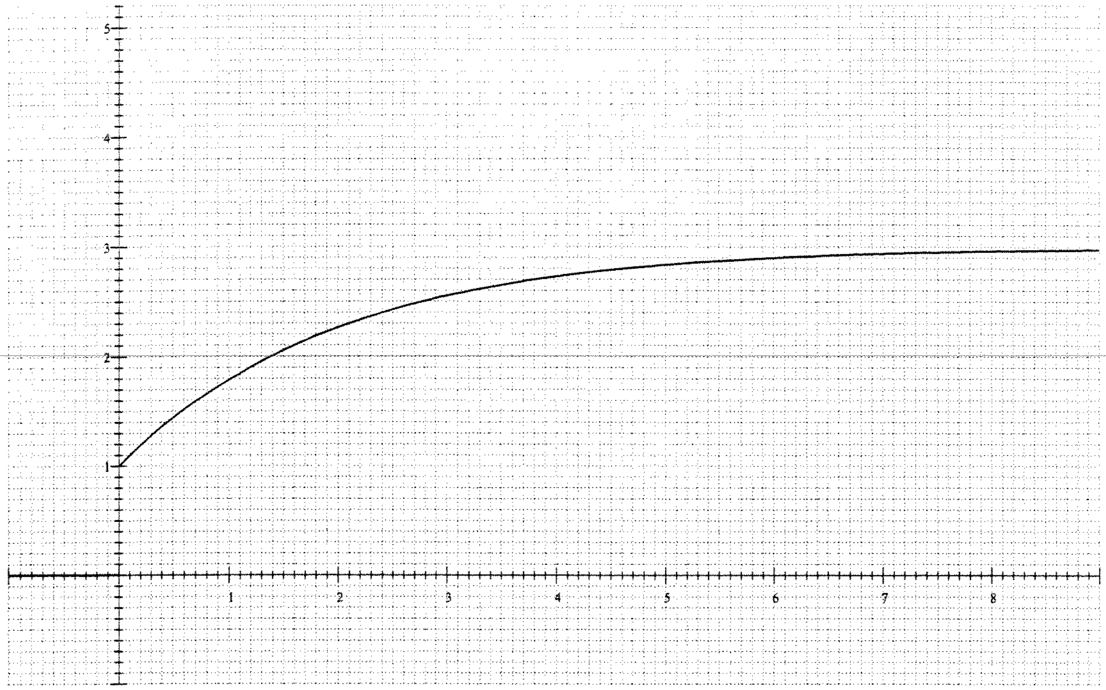
7. On admet que la fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   La valeur de ω correspondant au point M_1 du document réponse est-elle :
   - stictement inférieure à 500 ?
   - égale à 500 ?
   - strictement supérieure à 500 ?

   On justifiera la réponse.

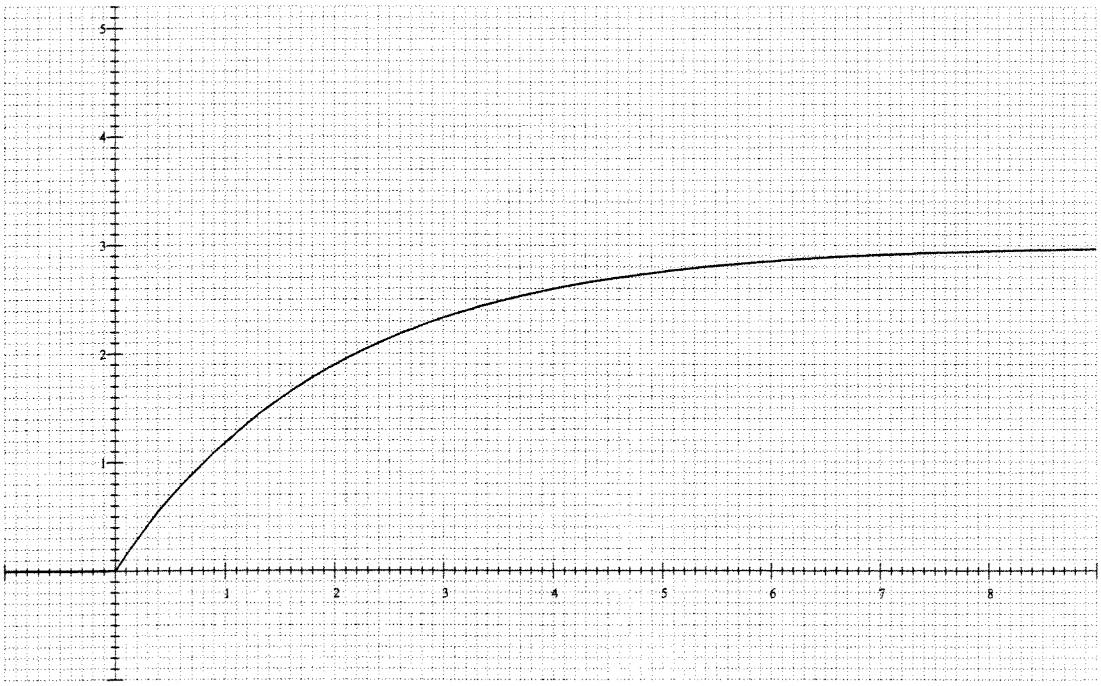
Document réponse



Annexe 1

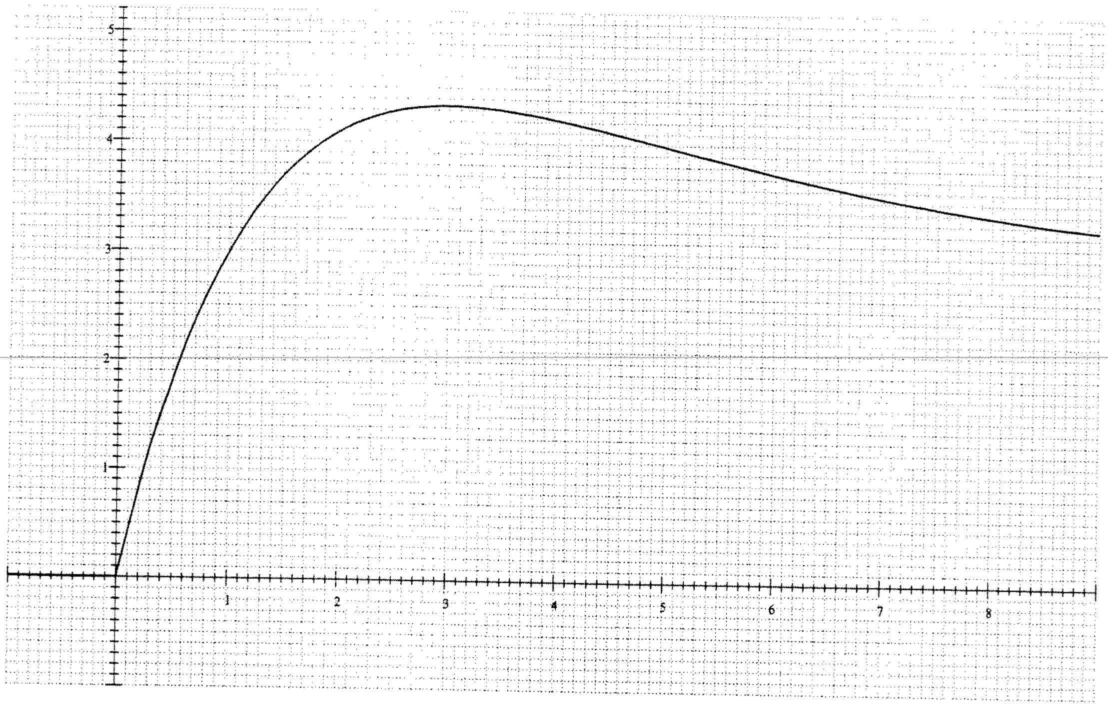


Courbe 1

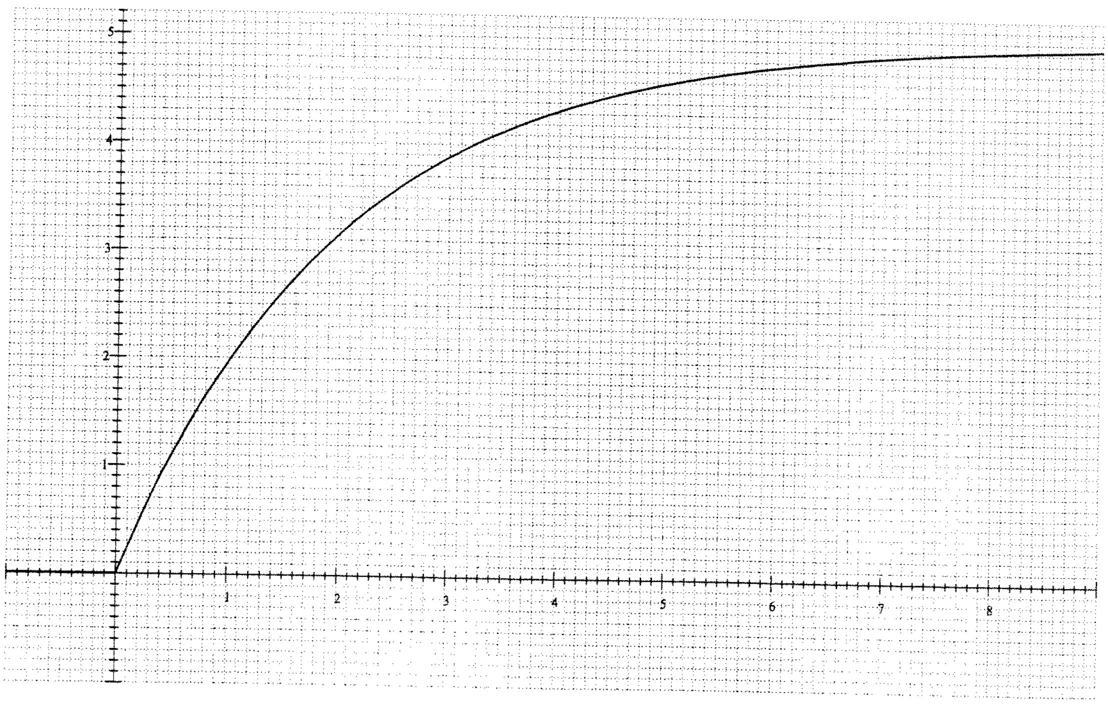


Courbe 2

Annexe 1 (suite)



Courbe 3



Courbe 4