BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
GROUPEMENT A

MATHÉMATIQUES

Session 2017

Durée : 3 heures

SPECIALITE A1	Coefficient
Contrôle industriel et régulation automatique	**2**
Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire	**3**

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.
Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaitre une défaillance, il peut la remplacer par une autre.
Les échanges de machine entre les candidats sont interdits.

Circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

Le document réponse page 9 est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (11 points)

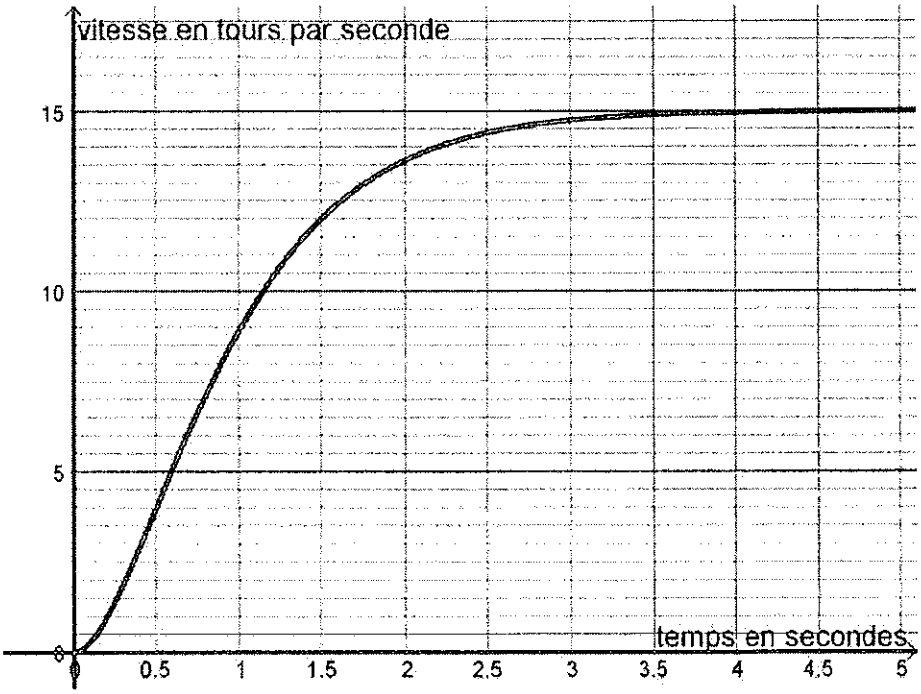
Les 4 parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution, en fonction du temps, de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu.

Partie A : Étude de la vitesse de rotation du moteur lors de son démarrage

Dans un premier temps, le moteur à courant continu utilisé n'est soumis à aucune charge mécanique. La vitesse de rotation de ce moteur, exprimée en tour par seconde (tour/s), est notée ω. Elle dépend du temps t , exprimé en seconde (s), écoulé depuis le démarrage du moteur.

La courbe ci-dessous représente l'évolution de cette vitesse en fonction du temps.



1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la représentation graphique ci-dessus.

a) Quelle est la vitesse de rotation du moteur à l'instant $t = 0$?

b) Quelle est la vitesse de rotation du moteur une seconde après le démarrage ?

c) Vers quelle valeur ω_S semble se stabiliser la vitesse de rotation du moteur ?

d) Avec la précision permise par le graphique, déterminer au bout de combien de temps on atteint 95% de la vitesse stabilisée. Expliquer.

2. On admet que, dans les conditions de fonctionnement étudiées dans la partie A, la vitesse de rotation du moteur est modélisée par la fonction ω définie pour $t \geq 0$ par :

$$\omega(t) = 15 - (30t + 15)\mathrm{e}^{-2t}$$

a) On note ω' la fonction dérivée de ω. Justifier que pour $t \geq 0$: $\omega'(t) = 60t\,\mathrm{e}^{-2t}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction ω sur $[0 ; +\infty[$.

c) Calculer $\omega'(0)$. Donner une interprétation graphique du résultat.

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour les parties B et C de l'exercice.

Équation différentielle sans second membre	Solutions sur $\mathbb{R}$
$a\,y''+b\,y'+cy=0$ avec a, b et c des constantes réelles. Équation caractéristique : $a\,r^2+b\,r+c=0$ de discriminant Δ.	○ Si $\Delta>0$: $t\to \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{r_1 t}+\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec A, B constantes réelles et r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique. ○ Si $\Delta=0$: $t\to(\mathrm{A}\,t+\mathrm{B})\,\mathrm{e}^{rt}$, avec A, B constantes réelles et r la solution de l'équation caractéristique. ○ Si $\Delta<0$: $t\to \mathrm{e}^{\alpha t}\,(\mathrm{A}\cos(\beta t)+\mathrm{B}\sin(\beta t))$, avec A, B constantes réelles et $\alpha+\mathrm{i}\,\beta$ et $\alpha-\mathrm{i}\,\beta$ les solutions de l'équation caractéristique.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle permettant d'obtenir la vitesse de rotation

Sous certaines conditions de charge, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu soumis à une tension constante U, exprimée en Volt (V), est solution de l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{4}y''+y'+y=\frac{\mathrm{U}}{k}$, où k est une valeur caractéristique du moteur.

1. On note (E_0) l'équation homogène associée à (E). On a donc :

$$(\mathrm{E}_0) :\ \frac{1}{4}y''+y'+y=0$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0).

2. Vérifier que la fonction constante $g : t\to\frac{\mathrm{U}}{k}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).

4. En prenant $k = 2/3$ et U = 10 V montrer que la fonction ω donnée dans la question A.2. est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Partie C : Détermination de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu à partir des principes de la physique

D'une manière plus générale on démontre que la vitesse de rotation du moteur alimenté par une tension continue U vérifie l'équation différentielle (E_1) : $\alpha^2 y''+2m\alpha\, y'+y=\frac{\mathrm{U}}{k}$,

où α, m et k sont des paramètres strictement positifs dépendant des caractéristiques physiques du moteur étudié (résistance, inductance, moment d'inertie).

Dans cette partie on prend : U=10V ; $\alpha = 0{,}3$; $m = 0{,}6$ et $k = 2/3$.

L'équation différentielle (E_1) s'écrit donc : $0{,}09\,y''+0{,}36\,y'+y=15$

1. Résoudre dans C l'équation : $0{,}09\,z^2 + 0{,}36\,z + 1 = 0$.

2. Parmi les quatre fonctions proposées ci-dessous, une seule est solution de l'équation différentielle (E_1) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Quelle est cette fonction ? Justifier la réponse.

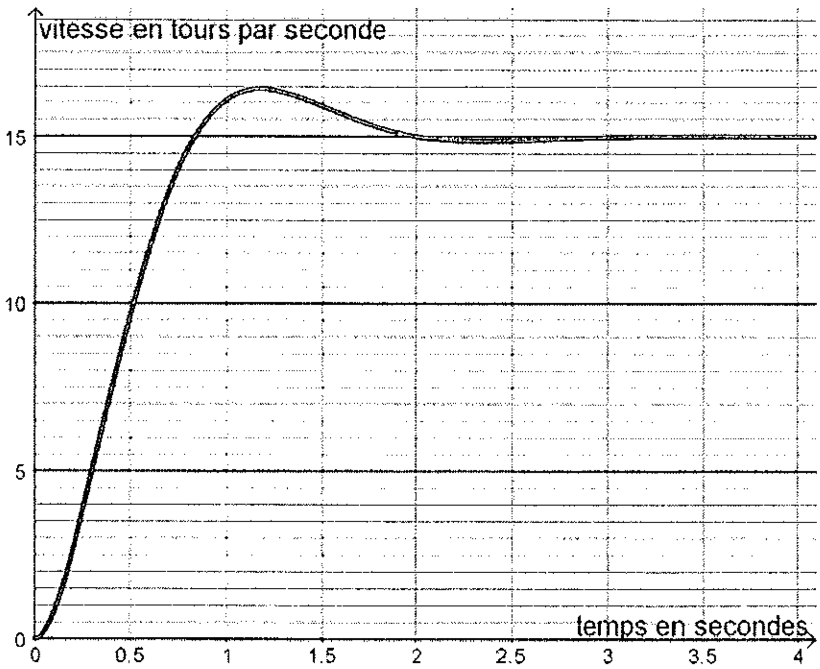
Fonction 1 : $t \mapsto 15\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{8}{3}t}\left(\cos(2t) + \frac{3}{4}\sin(2t)\right)\right)$.

Fonction 2 : $t \mapsto 15\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right)\right)$.

Fonction 3 : $t \mapsto 15\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t} - 15\,\mathrm{e}^{-\frac{14}{3}t}$.

Fonction 4 : $t \mapsto 15 - \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos\left(\frac{8}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{8}{3}t\right)\right)$.

3. La solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ modélise l'évolution de la vitesse du moteur en fonction du temps dans les conditions étudiées dans la partie C. Elle est représentée ci-dessous.



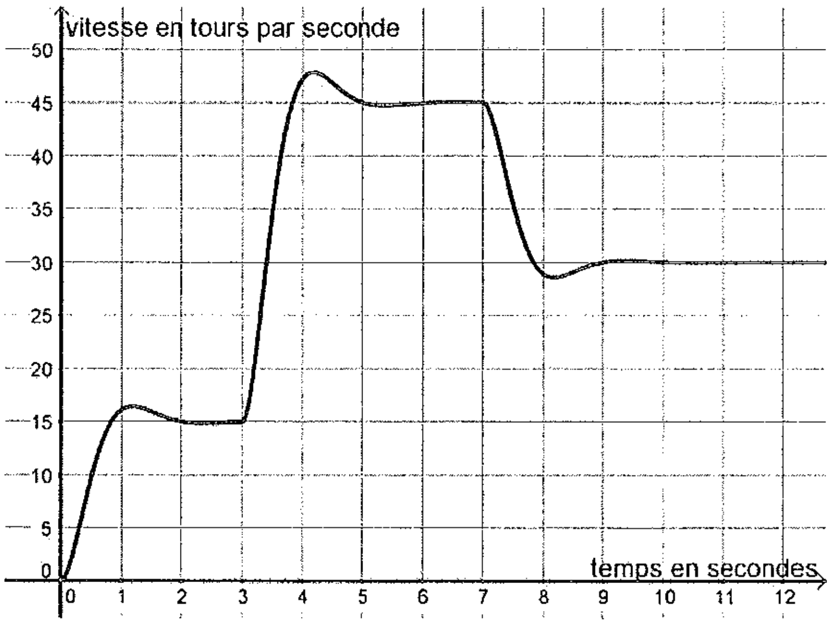
D'après cette modélisation, quelle est la vitesse maximale du moteur ?

À quel moment, environ, est-elle atteinte ?

Partie D : Comportement d'un moteur soumis à différents sauts de tension

Une boucle de régulation de vitesse permet à présent de faire fonctionner le moteur à différentes vitesses. La tension d'entrée vaut successivement 10V, 30V puis 20V.

La vitesse de rotation du moteur est alors analysée et illustrée par le graphique ci-dessous.



1. Déterminer à l'aide du graphique les trois instants où les tensions ont été modifiées. On ne demande pas de justification.

2. Représenter sur **le document réponse (page 9)** la tension d'entrée e, exprimée en Volt, appliquée aux bornes du moteur en fonction du temps t, exprimé en seconde.

3. On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction causale unité. On rappelle que :

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \mathcal{U}(t) = 1 \text{ sinon.}$$

Pour exprimer la tension d'entrée $e(t)$ appliquée aux bornes du moteur à l'instant t un étudiant propose l'expression $e(t) = 10\,\mathcal{U}(t) + 30\,\mathcal{U}(t-3) - 20\,\mathcal{U}(t-7)$ et remplit le tableau donné sur **le document réponse**.

a) Compléter, sur **le document réponse**, le tableau rempli par l'étudiant.

b) Une fois qu'il a terminé de remplir le tableau, l'étudiant se rend compte qu'il a donné une expression inexacte de $e(t)$. Expliquer pourquoi.

c) Donner l'expression exacte de $e(t)$. On n'attend pas de justification.

EXERCICE 2 (9 points)

Les deux parties suivantes sont indépendantes. Elles peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

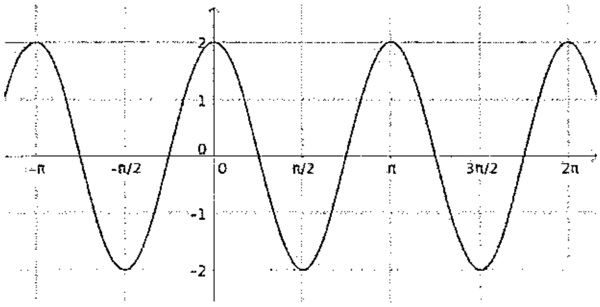
PARTIE A

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période π, vérifiant :

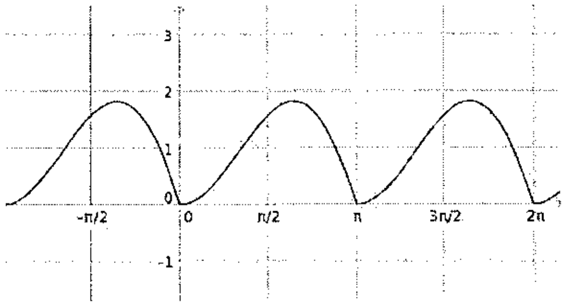
$$f(t) = t\sin(t) \quad \text{pour } t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right].$$

1. Parmi les quatre courbes suivantes quelle est celle qui représente la fonction f ? On n'attend pas de justification.

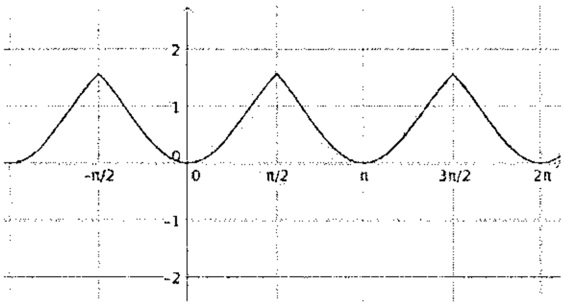
Courbe 1



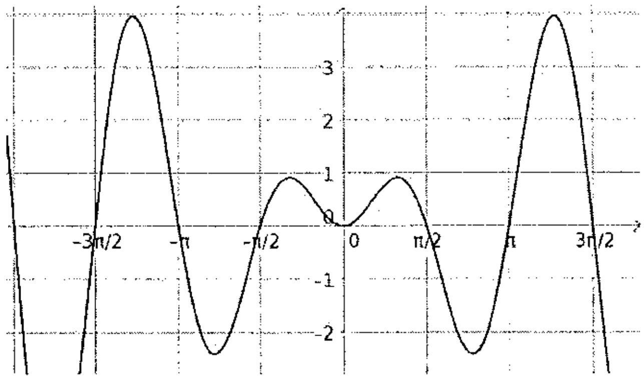
Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4



2. On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.
On note S son développement en série de Fourier.

<u>On rappelle que :</u>

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right), \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}, \text{ T période de } f\,;$$

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t \;. \text{ Pour } n \geq 1 : \; a_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

avec a constante réelle quelconque.

a) Justifier que $b_n = 0$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.

b) Montrer que la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = -t\cos(t) + \sin(t)$ est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto t\sin t$.

c) La fonction f étant paire et de période π, a_0 vérifie : $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

Vérifier que $a_0 = \frac{2}{\pi}$. Ecrire les étapes du calcul effectué.

3. On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$

Donner les valeurs de a_1 et a_2 arrondies au millième.

4. On note f_e le nombre positif vérifiant : $f_e^{\,2} = \frac{1}{\pi} \times \int_0^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.

On admet que l'expression $a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}(a_n^2 + b_n^2)$, obtenue d'après la formule de Parseval, permet d'obtenir la valeur approchée de $f_e^{\,2}$ arrondie au millième.

a) Calculer la valeur approchée de f_e arrondie au millième.

b) Si f modélise un signal de période π, que représente f_e ?

PARTIE B : Étude de quelques propriétés d'un filtre numérique.

- Le signal causal d'entrée d'un filtre numérique, noté $e(n)$, est l'échelon unité discret. On a donc : $e(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ 1 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$.
- Le signal causal de sortie de ce filtre numérique est noté $x(n)$ et vérifie, pour tout entier relatif n : $x(n) - x(n-2) = 0{,}04\, e(n-1)$. (*)

1.a) Justifier que $x(0) = 0$

b) Calculer $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$ et $x(5)$. Détailler au moins un des calculs sur la copie.

Dans les questions 2 et 3, on note E(z) et X(z) les transformées en Z respectives des signaux causaux $e(n)$ et $x(n)$.

On donne les formules suivantes.

Signal causal	Transformée en Z
$n \to 1$	$\dfrac{z}{z-1}$
$n \to d(n)$ où $d(0)=1$ et $d(n)=0$ sinon.	1
$n \to n$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$n \to a^n$ avec a réel non nul.	$\dfrac{z}{z-a}$
Propriétés	
$n \to x(n)$	$X(z)$
$y : n \to a^n x(n)$ avec a réel non nul	$Y(z) = X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$y : n \to x(n-n_0)$ pour $n \geq n_0$	$Y(z) = z^{-n_0} X(z)$
$y : n \to x(n+1)$	$Y(z) = z[X(z) - x(0)]$
$y : n \to x(n+2)$	$Y(z) = z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$

2. a) Quelle est l'expression de E(z) ?

b) Exprimer en fonction de z la transformée en Z de 0,04 $e(n-1)$.

c) Exprimer en fonction de z et de X(z) la transformée en Z de $x(n) - x(n-2)$.

d) Déduire de l'égalité (*) que : $\mathrm{X}(z) = \dfrac{0{,}04\, z^2}{(z-1)^2(z+1)}$.

3. On admet que $\mathrm{X}(z)$ peut s'écrire : $\mathrm{X}(z) = \dfrac{0{,}02\, z}{(z-1)^2} + \dfrac{0{,}01\, z}{z-1} - \dfrac{0{,}01\, z}{z+1}$.

a) En déduire que pour tout entier naturel n : $x(n) = 0{,}02n + 0{,}01(1-(-1)^n)$.

b) On rappelle que : $(-1)^{2n+2} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$.
Montrer que $x(2n+1) = x(2n+2)$ pour tout entier naturel n.

c) Représenter dans un repère à tracer sur la copie les termes du signal causal $x(n)$ pour n compris entre –2 et 6.